

CORRIGÉ BACC BLANC Série C 2021
LYCÉE CLASSIQUE D'EDÉA.

Par M. Nathanaël AMONO-NESSI
PLEG Maths.

PARTIE A. EVALUATION DES RESSOURCES.

Exercice 1.

1. Démontrons que la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

• Un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ est $\vec{n}(2; -1; -1)$.

• Un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$ est $\vec{u}(-2; 1; 1)$.

0,5pt

Il est clair que $\vec{u} = -\vec{n}$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, par conséquent la droite $(\mathcal{D})$ et le plan $(\mathcal{P})$ sont perpendiculaires.

2. Donnons l'expression analytique de S .

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $M'(x', y', z')$ son image par S .

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \vec{MM'} \perp (\mathcal{P})$$

• $I \in (\mathcal{P})$ où I est milieu de $[MM']$.

$$\bullet (\mathcal{MM'}) \perp (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{MM'} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \vec{MM'} = \lambda \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + 2\lambda \\ y' = y - \lambda \\ z' = z - \lambda \end{cases}$$

$$\bullet I \text{ milieu de } [MM'] \Leftrightarrow I\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2}\right)$$

$$I \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \frac{y+y'}{2} - \frac{z+z'}{2} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+x') - (y+y') - (z+z') - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+x+2\lambda) - (y+y+\lambda) - (z+z-\lambda) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2y - 2z + 6\lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\lambda = -4x + 2y + 2z + 6 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}(-2x + y + z + 3)$$

1pt

Ceci étant :
$$\begin{cases} x' = x + \frac{2}{3}(-2x + y + z + 3) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 6) \\ y' = y - \frac{1}{3}(-2x + y + z + 3) = \frac{1}{3}(2x + 2y - z - 3) \\ z' = z - \frac{1}{3}(-2x + y + z + 3) = \frac{1}{3}(2x - y + 2z - 3) \end{cases}$$

L'expression analytique de S est :
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z - 3) \\ z' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z - 3) \end{cases}$$

3. Déterminons les coordonnées du point H, intersection de (P) et (Q).

H étant le point d'intersection de (P) et (Q), alors $\begin{cases} H \in (Q) \\ H \in (P) \end{cases}$.

• $H \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{AH} = t\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H - 2 \\ z_H - 3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 - 2t \\ y_H = 2 + t \\ z_H = 3 + t \end{cases}$$

• $H \in (P) \Leftrightarrow 2(1 - 2t) - (2 + t) - (3 + t) - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -6t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1, \text{ Ainsi } H(3, 1, 2).$$

0,5pt

4. Donnons par son équation l'ensemble S des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{MH} = \sqrt{3}$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in S \Leftrightarrow \frac{MA}{MH} = \sqrt{3} \Leftrightarrow AM^2 = 3HM^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = 3(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 4z + 4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 14 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 18x - 6y - 12z + 42$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 16x - 2y - 6z + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x - y - 3z + 14 = 0.$$

Ainsi $\boxed{S: x^2 + y^2 + z^2 - 8x - y - 3z + 14 = 0.}$

0,5pt

5. Donnons la nature de $\mathcal{S}$ et déterminons ses éléments caractéristiques.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x - y - 3z + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 - 16 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

0,5pt

$\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(4; \frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ et de rayon $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2.

1. (a) Calculons la probabilité pour que la conique $H_{a,b}$ d'équation $2ax^2 + (-1)^b y^2 = 1$ soit une hyperbole.

$H_{a,b}$ est une hyperbole si $(a=1 \text{ et } b=1)$ ou $(a=-1 \text{ et } b=0)$ ou $(a=1 \text{ et } b=-1)$.

Si A désigne cet événement, alors $P(A) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20}$

Ainsi, $P(A) = 0,4$.

0,5pt

(b) Calculons la probabilité pour que l'équation différentielle $E_{a,b}: y'' + ay' + by = 0$ ait pour solutions $f: x \mapsto (Ax+B)e^x$.

L'équation caractéristique d'inconnue r de $E_{a,b}$ est $r^2 + ar + b = 0$
 $\Delta = a^2 - 4b$.

$E_{a,b}$ a pour solutions les fonctions $f: x \mapsto (Ax+B)e^x, (A, B \in \mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4b = 0 \\ -\frac{a}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ ce qui est impossible!}$$

Si B désigne cet événement, alors $P(B) = 0$.

0,5pt

(c) Calculons la probabilité pour que les plans $(P): ax + ay + bz + 3 = 0$ et $(Q): ax + by + z + 3 = 0$ soient parallèles.

• Un vecteur normal à (P) est $\vec{n}_P(1; a; b)$

• Un vecteur normal à (Q) est $\vec{n}_Q(a; b; 1)$

$(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P$ et $\vec{n}_Q$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a-b; ab-1; b-a^2) = (0; 0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=1 \\ b=a^2 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$$

les plans (P) et (Q) sont parallèles si $(a=1 \text{ et } b=1)$.

0,5pt

Si C désigne cet événement, alors $P(C) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = 0,1$.

$$\boxed{P(C) = 0,1.}$$

2. Déterminons la loi de probabilité de X.

X désigne la variable aléatoire égale à $|a+b|$ où a désigne le numéro de la 1^{ère} boule tirée et b celui de la deuxième boule tirée

Comme $a \in \{-1; 0; 1\}$, $b \in \{-1; 0; 1\}$, alors $|a+b| \in \{0; 1; 2\}$

Ainsi $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.

• $X=0 \Leftrightarrow (a=1 \text{ et } b=-1) \text{ ou } (a=-1 \text{ et } b=1)$

$$P(X=0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = 0,4.$$

• $X=1 \Leftrightarrow (a=-1 \text{ et } b=0) \text{ ou } (a=1 \text{ et } b=0) \text{ ou } (a=0 \text{ et } b=1) \text{ ou } (a=0 \text{ et } b=-1)$

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{8}{20} = 0,4.$$

• $X=2 \Leftrightarrow (a=-1 \text{ et } b=-1) \text{ ou } (a=1 \text{ et } b=1)$

$$P(X=2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{20} = 0,2.$$

1pt

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,4	0,4	0,2

Calculons $E(X)$ et $V(X)$.

$$E(X) = \sum x_i P_i = 0,4 \times 0 + 1 \times 0,4 + 2 \times 0,2 = 0,8.$$

$$\boxed{E(X) = 0,8.}$$

0,25pt

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= 0^2 \times 0,14 + 1^2 \times 0,14 + 2^2 \times 0,12 - (0,8)^2 \\
 &= 0,14 + 0,18 - 0,64 = 0,56.
 \end{aligned}$$

$$V(X) = 0,56.$$

0,25pt

Exercice 3

1. Précisons la nature de (Γ) et déterminons son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer.

$$H \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{d(H, F)}{d(H, (\Delta))} = 2 \Leftrightarrow \frac{HF}{HH} = 2 \text{ où } H \text{ est le projeté orthogonal de } H \text{ sur la droite } (\Delta).$$

0,75pt

(Γ) est une hyperbole d'excentricité $e = 2$; Un de ses foyers est le point $F(0, 4)$ et la directrice associée à ce foyer est la droite (Δ) .

2. Déterminons une équation de (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $H(x, y)$ un point du plan.

H étant le projeté orthogonal de H sur la droite (Δ) , alors $H(x, \frac{3}{2})$

$$H \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{HF}{HH} = 2$$

$$\Leftrightarrow FH^2 = 4HH^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-4)^2 = 4(y-\frac{3}{2})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = 4(y^2 - 3y + \frac{9}{4})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8y + 16 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0.$$

$$(\Gamma): x^2 - 3y^2 + 4y + 7 = 0$$

0,75pt

3.(a) Donnons l'écriture complexe de φ .

φ étant la similitude directe plane de centre O , de rapport 2 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, alors son écriture complexe est $z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$

$$\text{Soit } z' = 2iz.$$

0,25pt

(b) Donnons la nature exacte de (Σ) et précisons son excentricité.

on a: $\begin{cases} (\Sigma) \text{ est l'image de } (\Gamma) \text{ par } \varphi. \\ (\Gamma) \text{ est une hyperbole d'excentricité } e=2 \\ \varphi \text{ est la similitude plane directe de centre } O, \text{ de rapport } 2 \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

donc (Σ) est une hyperbole d'excentricité 2.

0,5pt

Exercice 4.

1. Etudions les variations de f .

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x+1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1)e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x} \right) = 0$$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)' e^{-2x} + (e^{-2x})' (2x+1) = 2e^{-2x} - 2(2x+1)e^{-2x} \\ &= (2-4x-2)e^{-2x} \\ &= (-4x)e^{-2x} = -4xe^{-2x} \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-4x$.
Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	$+$		$-$
f	$-\infty$	1	0

0,75pt

2. Déterminons une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point $\mathcal{B}$ d'abscisse $\frac{1}{2}$.

$$(T): y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right). \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)e^{-2 \times \frac{1}{2}} = -\frac{2}{e}.$$

$$\text{et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)e^{-2 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{e}.$$

$$\text{Ainsi, (T): } y = -\frac{2}{e}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{e} = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}.$$

$$\boxed{(T): y = -\frac{2}{e}x + \frac{3}{e}.$$

0,25 pt

3.(a) Déterminons $g'(x)$ et $g''(x)$.

g est une fonction deux-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
on a: $g(x) = f'(x) + \frac{2}{e} = -4xe^{-2x} + \frac{2}{e}$. 0,25 pt

$$g''(x) = f''(x) = (-4x)'e^{-2x} + (e^{-2x})'(-4x)$$

$$= -4e^{-2x} + 8xe^{-2x} = (-4 + 8x)e^{-2x} \quad \text{0,25 pt}$$

(b) Déterminons le signe de $g(x)$ et déduisons-en la position relative de $\mathcal{C}$ et (T).

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$, donc le signe de $g''(x)$ est celui de $8x - 4$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

g' est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

De plus $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)e^{-1} + \frac{2}{e} = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq 0$
par conséquent g est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		0	
g		0	

0,5 pt

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[$, $g(x) < 0$

- pour tout $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, $g(x) > 0$
- pour $x = \frac{1}{2}$, $g(x) = 0$.

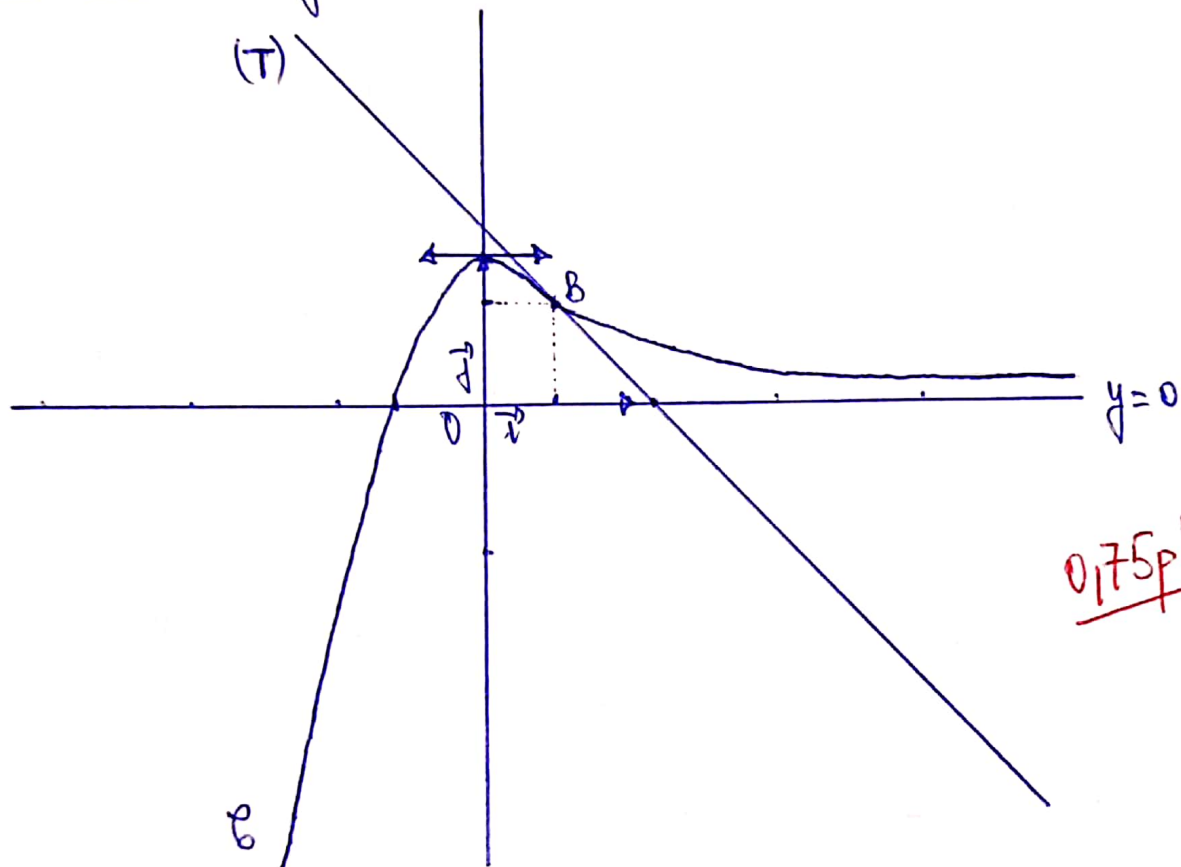
On en déduit que $\mathcal{C}$ est au-dessous de (T) sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

0,5 pt

- $\mathcal{C}$ est au-dessus de (T) sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

- $\mathcal{C}$ et (T) se rencontrent pour $x = \frac{1}{2}$ (au point B).

(c) Traçons la tangente (T) et la courbe $\mathcal{C}$.



0,75 pt

Note $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + \frac{1}{x}) e^{-2x} = 0$, donc $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe $(0, \vec{j})$.

4. Calculons l'aire $\mathcal{A}(x)$ du domaine $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{A}(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x f(x) dx \text{ u.A.} = \int_{-\frac{1}{2}}^x (2x+1) e^{-2x} dx \text{ u.A.}$$

Posez $u(x) = 2x+1$

$u'(x) = 2$

$v'(x) = e^{-2x}$

$v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$

$$\mathcal{A}(x) = \left[-\frac{1}{2} (2x+1) e^{-2x} \right]_{-\frac{1}{2}}^x - \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^x -2 e^{-2x} dx \text{ (en u.A.)}$$

$$= -\frac{1}{2}(2\lambda+1)e^{-2\lambda} - \frac{1}{2}[e^{-2\lambda}]^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(2\lambda+1)e^{-2\lambda} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda} + \frac{e}{2} \text{ uA}$$

$$= (-\lambda-1)e^{-2\lambda} + \frac{e}{2} \text{ uA.}$$

0,75pt

5. Vérifions que $H: x \mapsto (-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8})e^{-4x}$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H'(x) = (-2x - \frac{3}{2})e^{-4x} - 4e^{-4x}(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8})$$

$$= (-2x - \frac{3}{2} + 4x^2 + 6x + \frac{5}{2})e^{-4x} = (4x^2 + 4x + 1)e^{-4x}$$

$$= (2x+1)^2 e^{-4x} = h(x)$$

0,5pt

Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

6. Calculons le volume V du solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x))^2 dx \text{ (en u.v.)}$$

$$= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2x+1)^2 e^{-4x} dx \text{ (en u.v.)} = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h(x) dx \text{ (en u.v.)}$$

$$= \pi [H(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{ (en u.v.)}$$

$$\text{or } H(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{5}{8})e^{-2} = -\frac{13}{8}e^{-2} = -\frac{13}{8e^2}$$

$$\text{et } H(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8})e^2 = -\frac{1}{8}e^2$$

$$\text{donc } H(\frac{1}{2}) - H(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}e^2 - \frac{13}{8e^2} = \frac{e^4}{8e^2} - \frac{13}{8e^2} = \frac{e^4 - 13}{8e^2}$$

$$\text{Ceci étant } V = \left(\frac{e^4 - 13}{8e^2}\right) \pi \text{ u.v.}$$

0,5pt

b) 1. Déterminons $\text{Ker } \varphi$ et donnons-en une base.

$$\text{Ker } \varphi = \{ \vec{u} \in E \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_E \}$$

$$\text{Soit } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \in E, \vec{u} \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_E$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ +x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$\text{Ker}\varphi$ est une droite vectorielle dont un système d'équations est $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$.

$(x, y, z) = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1) = x\vec{e}_1$ où $\vec{e}_1 = \vec{v} - \vec{k}$

Une base de $\text{Ker}\varphi$ est $\vec{e}_1$. 0,5pt

2. Déterminons $\text{Im}\varphi$, puis déterminons une base de $\text{Im}\varphi$.

$$\text{Im}\varphi = \{ \vec{v} \in E \mid \exists \vec{u} \in E, \varphi(\vec{u}) = \vec{v} \}.$$

$$\text{Soit } \vec{v} = x'\vec{v} + y'\vec{f} + z'\vec{k} \in E,$$

$$\vec{v} \in \text{Im}\varphi \Leftrightarrow \exists \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{f} + z\vec{k} \in E \mid \varphi(\vec{u}) = \vec{v}.$$

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = x' \\ y = y' \\ +x+z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = +z' \\ y' = y \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{v} \in \text{Im}\varphi \Leftrightarrow \vec{v} = x'\vec{v} + y'\vec{f} + x'\vec{k} \Leftrightarrow \vec{v} = x'(\vec{v} + \vec{k}) + y'\vec{f}$$

$\text{Im}\varphi$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où $\vec{e}_2 = \vec{v} + \vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{f}$.

une base de $\text{Im}\varphi$ est $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$. 0,5pt

3. Montrons que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Ker}\varphi$ et d'un vecteur de $\text{Im}\varphi$.

$$\text{Soit } \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{f} + z\vec{k} \text{ un vecteur de } E.$$

$$\text{On a: } \vec{e}_1 = \vec{v} - \vec{k}; \vec{f} = \vec{e}_3 \text{ et } \vec{e}_2 = \vec{v} + \vec{k}, \text{ donc } \vec{v} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{2}; \vec{f} = \vec{e}_3$$

$$\text{et } \vec{k} = \frac{-\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{2}.$$

$$\text{Ceci équivaut: } \vec{u} = x\left(\frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{2}\right) + y\vec{e}_3 + z\left(\frac{-\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x-z)\vec{e}_1 + \frac{1}{2}(x+z)\vec{e}_2 + y\vec{e}_3$$

$$= \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ avec } \vec{u}_1 = \frac{1}{2}(x-z)\vec{e}_1 \in \text{Ker}\varphi; \vec{u}_2 = \frac{1}{2}(x+z)\vec{e}_2 + y\vec{e}_3 \in \text{Im}\varphi$$

L'unicité provient du fait que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E . 0,5pt

PARTIE B: EVALUATION DES COMPETENCES

C₁, C₂, C₃.

Tâche 1. Déterminons le montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA pour l'achat du sable.

- Déterminons les entiers naturels a et b.

ou résout le système :
$$\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{PPCM}(a, b) = 440. \end{cases}$$

posons $\delta = \text{PGCD}(a, b)$, alors δ divise a et δ divise b
donc δ^2 divise a^2 et b^2 , par suite δ^2 divise $a^2 + b^2 = 4625$.

or $4625 = 1^2 \times 5^2 \times 185$, donc $\delta^2 \in \{1^2, 5^2\}$ et comme $\delta > 0$
alors $\delta \in \{1, 5\}$.

- $\delta = 1 \Rightarrow ab = \text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = 440$

Ainsi $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 2(440) = 5505$

Comme $\sqrt{5505} \notin \mathbb{N}$, alors $\delta \neq 1$.

- $\delta = 5 \Rightarrow ab = \text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = 2200$.

Ainsi $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 9025 \Rightarrow a+b=95$ car $a+b > 0$.

De même, $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 225 \Rightarrow a-b=-15$ car $a-b < 0$

le système ci-dessus est donc équivalent à :
$$\begin{cases} a+b=95 \\ a-b=-15 \end{cases}$$

donc $2a=80$ et $2b=110$

c'est-à-dire $a=40$ et $b=55$.

- Volume de sable contenu dans le bac plein.

$V_{\text{sable}} = V_{\text{bac plein}} = 2\text{m} \times 0,1 \times 40\text{m} \times 0,2 \times 55\text{m} = 88\text{m}^3$.

- Montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA

$88 \times 9000\text{F} = 792.000\text{ FCFA}$.

0,25pt

0,25pt

Tâche 2. Déterminons le montant nécessaire à prévoir pour H. ATANGANA pour satisfaire tous les transporteurs de son sable.

- Déterminons le nombre de garçons et le nombre de filles.

Soit x le nombre de garçons et y le nombre de filles. ($x > 0, y > 0$)

- le sable devra être transporté en 200 tours signifie que:

$$9x + 7y = 200$$

- On souhaite qu'il y ait plus de garçons que de filles signifie que $x > y$.

On résout donc l'équation $9x + 7y = 200$ sachant que $x > y$

Nous avons $9 = 7 \times 1 + 2$

$$7 = 2 \times 3 + 1, \text{ donc } 1 = 7 - 2 \times 3$$

$$= 7 - 3(9 - 7x)$$

$$= 9x(-3) + 7 \times 4$$

Ceci étant $200 = 9(-600) + 7 \times 800$.

$$9x + 7y = 200 \Leftrightarrow 9x + 7y = 9(-600) + 7 \times 800$$

$$\Leftrightarrow 9(x + 600) = 7(800 - y).$$

1pt

or 7 divise $7(800 - y)$, donc 7 divise $9(x + 600)$ et Comme 9 et 7 sont premiers entre eux, alors d'après le théorème de GAUSS, 7 divise $x + 600$.

Ainsi, il existe un entier relatif k tel que $x + 600 = 7k$
c'est-à-dire $x = 7k - 600$.

On en déduit de façon analogue que $y = 800 - 9k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7k - 600 > 0 \\ 800 - 9k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{600}{7} \\ k < \frac{800}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{600}{7} < k < \frac{800}{9}$$
$$\Rightarrow 85,71 < k < 88,8$$

$$x > y \Leftrightarrow 7k - 600 > 800 - 9k \Leftrightarrow k > \frac{1400}{16} = 87,5, \text{ donc } \boxed{k = 88}$$

Ceci étant: $x = 7 \times 88 - 600 = 16$. et $y = 800 - 9 \times 88 = 8$.

Le groupe d'enfants comptait 16 garçons et 8 filles.
Soit 24 enfants.

0,25pt

- Montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA.

$$24 \times 1500 \text{ F} = 36.000 \text{ FCFA.}$$

0,25pt

Tâche 3 Déterminons le montant nécessaire à prévoir pour entourer son champ de plants d'arbres fruitiers.

- Nombre de plants d'arbres fruitiers.

Soit d la distance entre deux plants d'arbres fruitiers consécutifs.

- Comme il y a un plant d'arbre fruitier à chaque sommet du champ, alors d doit être un diviseur commun de 132, 156 et 204

- De plus, on veut entourer le champ avec un minimum d'arbres fruitiers, donc d doit être le plus grand possible.

Ainsi, $d = \text{PGCD}(132; 156; 204)$.

$$132 = 2^2 \times 3 \times 11; \quad 156 = 2^2 \times 3 \times 13; \quad 204 = 2^2 \times 3 \times 17$$

$$d = 2^2 \times 3 = 12.$$

la distance entre deux plants d'arbres fruitiers est $d = 12 \text{ m}$.

- le périmètre (Périmètre) du champ est:

$$P = 132 \text{ m} + 156 \text{ m} + 204 \text{ m} = 492 \text{ m}.$$

1,25pt

- le nombre de plants d'arbres fruitiers est donc $\frac{492}{12}$ soit 41 plants.

- Montant nécessaire à prévoir par M. ATANGANA.

$$41 \times 1250 \text{ F} = 51250 \text{ FCFA.}$$

0,25pt