République du Cameroun
Éléments de correction de l'épreuve zéro de mathématiques
Baccalauréat C et E
Session de 2021
Rédigé par : Nzouekeu Mbitkeu Patrice

Partie B : Évaluation des compétences.

Problème 1. *(6,75 points)*

1. *Dans le repère défini par M.TAGNE, donnons la position exacte des lieux d'accès qui marquent la rencontre des courbes décrivant les côtés du terrain.*

♣ *Déterminons les valeurs possibles de l'entier naturel n.*

$$5 \equiv 2[3]$$
$$5^2 \equiv 1[3]$$
$$5^3 \equiv 2[3]$$
$$5^4 \equiv 1[3]$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

$$5^{2k} \equiv 1[3]$$
$$5^{2k+1} \equiv 2[3]$$

Nous déduisons donc que $n \in \{1; 2\}$. D'après la famille de fonctions définie par

$$f_n(x) = (1-x)e^{nx}$$

on obtient les deux fonctions définies comme suit :

$$f_1(x) = (1-x)e^{x}$$

et

$$f_2(x) = (1-x)e^{2x}$$

♣ *Position relative des deux courbes (C_1) de $f_1(x)$ et (C_2) de $f_2(x)$.*
Il suffit de résoudre l'équation

$$f_1(x) = f_2(x)$$
$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow (1-x)e^{x} = (1-x)e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow (1-x)e^{x} - (1-x)e^{2x} = 0$$
$$\Leftrightarrow [(1-x)(e^{x} - e^{2x})] = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-x)(e^{x} - e^{2x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)=0 \quad ou \quad (e^x - e^{2x})=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad ou \quad e^x(1-e^x)=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad ou \quad e^x=1$$

$$\Leftrightarrow x=1 \quad ou \quad x=0$$

$$f_1(1)=(1-1)e^1=0$$

$$f_1(0)=(1-0)e^0=1$$

On a les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$ *[2,25 points]*

2. *Dans un repère orthomormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, fesons une représentation rigoureuse du domaine de M.TAGNE sur l'intervalle $[-2;+\infty[$. (4cm pour 1 unité)*

♣ *Étude de la fonction $f_1(x)$ sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.*

$$f_1(x)=(1-x)e^x$$

Calculons les limites aux bornes

$$\lim_{x\to -2^+} f_1(x) = \lim_{x\to -2^+}(1-x)e^x = (1-(-2))e^{-2} = 3e^{-2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_1(x) = \lim_{x\to +\infty}(1-x)e^x = -\infty$$

Calculons la derivé

$\forall x \in [-2;+\infty[$,

$$f_1^{'}(x)=[(1-x)e^x]' = (1-x)'e^x + (e^x)'(1-x) = -e^x + e^x(1-x) = e^x(-1+1-x) = -xe^x$$

$$f_1^{'}(x) = -xe^x$$

$$f_1^{'}(x)=0 \Leftrightarrow -xe^x=0$$

$$\Leftrightarrow -x=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

$$f_1(0)=(1-0)e^0=1$$

Dressons le tableau de variations

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$3e^{-2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

♣ *Étude de la fonction $f_2(x)$ sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.*

$$f_2(x) = (1-x)e^{2x}$$

Calculons les limites aux bornes

$$\lim_{x\to -2^+} f_2(x) = \lim_{x\to -2^+} (1-x)e^{2x} = (1-(-2))e^{-4} = 3e^{-4}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim_{x\to +\infty} (1-x)e^{2x} = -\infty$$

Calculons la derivé

$\forall x \in [-2;+\infty[$,

$$f_2'(x) = [(1-x)e^{2x}]' = (1-x)'e^{2x} + (e^{2x})'(1-x) = -e^{2x} + 2e^{2x}(1-x) = e^{2x}(-1+2-2x) = (1-2x)e^{2x}$$

$$f_2'(x) = (1-2x)e^{2x}$$

$$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x)e^{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-2x = 0$$

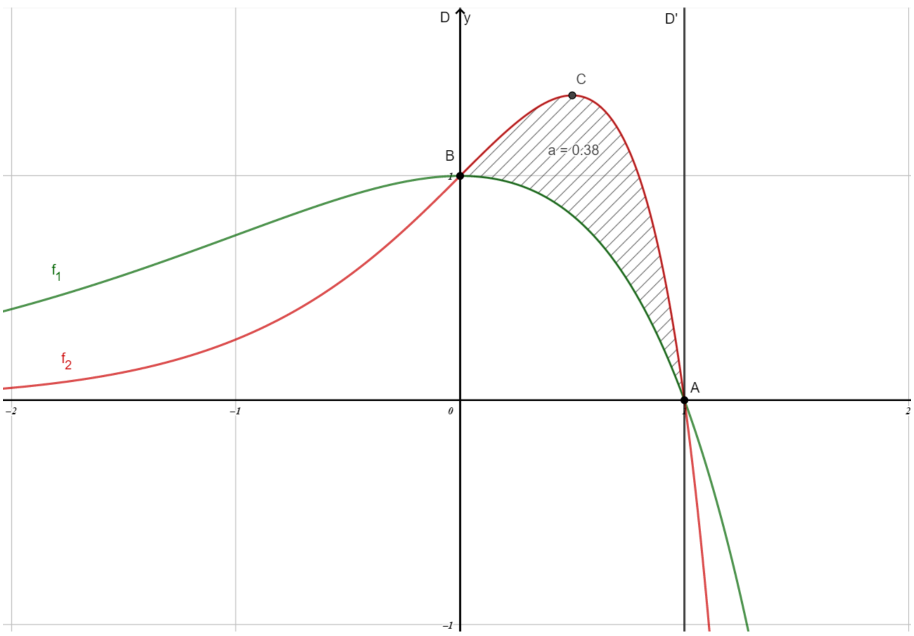
$$\Leftrightarrow 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)e^{2\times\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e = \frac{e}{2}$$

Dressons le tableau de variations

x	-2		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$3e^{-4}$	$\nearrow$	$e/2$	$\searrow$	$-\infty$



[2,25 points]

3. *Déterminons le montant à prévoir pour couvrir entièrement le domaine. (On prendra pour unité d'aire* $10.000m^2$*)*

♣ *Cherchons d'abord l'aire comprise entre les deux courbes délimitées par les droites d'équation* $x = 0$ *et* $x = 1$.

On a

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \Big[f_2(x) - f_1(x)\Big] dx \\ &= \int_0^1 \Big[(1-x)e^{2x} - (1-x)e^x\Big] dx \\ &= \int_0^1 (1-x)e^{2x} dx - \int_0^1 (1-x)e^x dx \\ &= I_2 - I_1 \end{aligned}$$

avec

$$I_2 = \int_0^1 (1-x)e^{2x} dx$$

et

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

Calculons

$$I_2 = \int_0^1 (1-x)e^{2x} dx$$

Posons $u(x) = 1 - x$, $u'(x) = -1$, $v'(x) = e^{2x}$; $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

par intégration par partie on a :

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^1 (1-x)e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{2}e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{2}(1-x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Calculons

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

Posons $h(x) = 1 - x$, $h'(x) = -1$, $r'(x) = e^x$; $r(x) = e^x$

par intégration par partie on a :

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx = \Big[(1-x)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^x dx$$

$$= \Big[(1-x)e^x\Big]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= \Big[(1-x)e^x\Big]_0^1 + \Big[e^x\Big]_0^1$$

$$= \Big[(1-x)e^x + e^x\Big]_0^1 = e-2$$

$$A = I_2 - I_1 = \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - (e-2)\right)u.a$$

$$A = I_2 - I_1 = \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)u.a$$

$$A = I_2 - I_1 = 10000\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)m^2$$

d'où le montant M vaut

$$M = 2500 \times 10000\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)FCFA = 25000000\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} - e + 2\right)FCFA$$

$$M \simeq (6250000e^2 + 31250000 - 25000000e) \;\; FCFA$$

$$M \simeq 9474554,90684043 \;\; FCFA$$

[2,25 points]